PROPOSITION DE CORRECTION DU BTS MAINTENANCE 2005

Exercice 1

A.Résolution d'une équation différentielle

1. Résolution del'équation différentielle $(1+x)y' + y = 0 \qquad (E_0)$

   Les équations différentielles de la forme $a(x)y' + b(x)y = 0$ admettent pour solution les fonctions de la forme $y = Ce^{-F(x)}$ où $F(x)$ est une primitive de $f(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$

   $f(x) = \frac{1}{x+1}$ qui admet pour primitive $ln(1+x)$ puisque nous sommes sur l'intervalle $]-1\ ,\ +\infty[$

   L'équation différentielle (E_0) a pour solution générale

   $$Y = ke^{-ln(1+x)} = ke^{ln(\frac{1}{1+x})} = \frac{k}{1+x}$$

2. Calculons la dérivée de $g(x) = \frac{ln(1+x)}{1+x}$

   $$g'(x) = \frac{\frac{1}{1+x} \times (1+x) - ln(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{1 - ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

   Calculons $(1+x)g'(x) + g(x)$

   $(1+x)g'(x) + g(x) = \frac{1-ln(1+x)}{1+x} + \frac{ln(1+x)}{1+x} = \frac{1}{1+x}$

   $(1+x)g'(x) + g(x) = \frac{1}{1+x}$

   $g(x)$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E)

   $$y = \frac{k}{1+x} + \frac{ln(1+x)}{1+x}$$

4. Déterminons la solution particulière de (E) qui vérifie $f(0) = 2$

   La solution particulière f est de la forme $f(x) = \frac{k}{1+x} + \frac{ln(1+x)}{1+x}$

   $f(0) = k$

   la solution particulière est : $f(x) = \frac{2}{1+x} + \frac{ln(1+x)}{1+x} = \frac{2+ln(1+x)}{1+x}$

B. Etude d'une fonction

1. Nous avons $\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty$ donc la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

   Nous avons $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

2. (a) $f(x) = \frac{2+ln(1+x)}{1+x}$

   Calculons $f'(x)$

   $$f'x) = \frac{\frac{1}{1+x} \times (1+x) - (2 + ln(1+x))}{(1+x)^2} = \frac{-1 - ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

(b) Résolvons l'inéquation $-1 - ln(1+x) \geq 0$
$-1 - ln(1+x) \geq 0$ donc
$ln(1+x) \leq -1$
$1 + x \leq e^{-1}$
et $x \leq e^{-1} - 1$
$-1 - ln(1+x) \geq 0$ si $x \in]-1\ ,\ e^{-1} - 1]$
$f'(x)$ est du signe de l'expression $-1 - ln(1+x)$ car $(1+x)^2$ est strictement positif sur l'intervalle on peut déduire que :
$f'(x) \geq 0$ si $x \in]-1\ ,\ e^{-1} - 1]$
et
$f'(x) \leq 0$ si $x \in [e^{-1} - 1\ ,\ +\infty[$

(c) $f(e^{-1} - 1) = \frac{2 + ln(e^{-1})}{e^{-1}} = e(2 - 1) = e$

x	-1		$e^{-1} - 1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

3. (a) D'après le développement limité on peut déduire que la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ à pour équation $y = 2 - x$
(b) Le terme $\frac{1}{2}x^2$ est positif donc la courbe $\mathcal{C}$ est au dessus de sa tangente $\mathcal{T}$

C. Calcul intégral

1. $G(x) = \frac{1}{2}[ln(1+x)]^2$
donc $G'(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times ln(1+x) \times \frac{1}{1+x} = \frac{ln(1+x)}{1+x)}$
2. $fx) = \frac{2+ln(1+x)}{1+x} = \frac{2}{1+x} + \frac{ln(1+x)}{1+x}$
donc $F(x) = 2ln(1+x) + \frac{1}{2}[ln(1+x)]^2$
3. (a) $I = \int_0^2 f(x)dx = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0)$
$F(2) = 2ln3 + \frac{1}{2}(ln3)^2$
$F(0) = 0$
donc $I = 2ln3 + \frac{1}{2}(ln3)^2$.
(b) $I \simeq 2,80$
(c) L'aire limitée par la courbe l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$ est de 2,80 cm^2

<u>Exercice 2</u>

A. loi normale

1. La variable aléatoire X_1 suit une loi normale de moyenne $m = 90$ et d'écart type $\sigma = 0,17$ $\mathcal{N}(90\ ;\ 0,17)$
Soit la variable aléatoire $T_1 = \frac{X_1 - 90}{0,17}$
La variable aléatoire T_1 suit une loi nomale centrée et réduite
$P(89,6 \leq X_1 \leq 90,4) = P\left(\frac{89,6-90}{0,17} \leq T_1 \leq \frac{90,4-90}{0,17}\right) = P(-2,35 \leq T_1 \leq 2,35) = \pi(2,35) - \pi(-2,35) = 2\pi(2,35) - 1 = 0,9812$
$P(89,6 \leq X_1 \leq 90,4) = 0,98$

2. La variable aléatoire D suit une loi normale de moyenne $m = 90$ et d'écart type σ_1 $\mathcal{N}(90\ ;\ \sigma_1)$

   Soit la variable aléatoire $T = \frac{D-90}{\sigma_1}$

   La variable aléatoire T suit une loi nomale centrée et réduite

   $P(89,6 \leq D \leq 90,4) = 0,99$

   $P\left(\frac{89,6-90}{\sigma_1} \leq D \leq \frac{90,4-90}{\sigma_1}\right) = 0,99$

   $P\left(\frac{-0,4}{\sigma_1} \leq D \leq \frac{0,4}{\sigma_1}\right) = 0,99$

   $2\pi\left(\frac{0,4}{\sigma_1}\right) - 1 = 0,99$

   $\pi\left(\frac{0,4}{\sigma_1}\right) = 0,995$

   Sur la table nous lisons que $\pi(2,545) = 0,995$

   donc $\frac{0,4}{\sigma_1} = 2,545$

   alors $\sigma_1 = 0,16$

B. loi binomiale

1. La variable aléatoire Y_1 suit une loi binomiale car

   Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement de 4 rondelles à un tirage avec remise

   et l'on a deux éventualités le diamètre est défectueux avec la probabilité $p = 0,02$ ou le diamètre est conforme avec la probabilité $q = 1 - p = 0,98$.

   La variable aléatoire Y_1 suit une loi binomiale de paramètre $n = 4$ et $p = 0,02$ $\mathcal{B}(4\ ,\ 0,02)$

2. $P(Y_1) = 0 = 0,98^4 = 0,922$

3. $P(Y_1 \leq 1) = P[(Y_1 = 0) \cap (Y_1 = 1)] = P(Y_1 = 0) + P(Y_1 = 1)$

   car les évènements sont incompatibles

   $P(Y_1 \leq 1) = 0,98^4 + 4 \times 0,02 \times 0,98^3 = 0,998$

C. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

1. La variable aléatoire Y_2 suit une loi binomiale de paramètre $n = 1000$ et $p = 0,02$

   Cette loi à pour espérance mathématique $E(Y_2) = np = 1000 \times 0,02 = 20$

   et pour écart type $\sigma_{Y_2} = \sqrt{npq} = \sqrt{2 \times 0,02 \times 0,98} = 4,43$

   Y_2 peut être approximée par une loi normale qui aura pour moyenne la moyenne de Y_2 donc 20 et pour écart type l'écart type de Y_2 4,43.

2. La variable aléatoire Z suit une loi normale $\mathcal{N}(20\ ;\ 4,43)$

   La variable aléatoire $T = \frac{Z-20}{4,43}$ suit une loi normale centrée et réduite

   $P(Z \leq 15,5) = P\left(T \leq \frac{15,5-20}{4,43}\right) = \pi\left(-\frac{4,5}{4,43}\right) = 1 - \pi(1.02) = 1 - 0,8461 = 0,1539$

   $P(Z \leq 15,5) = 0,15$

D. Test d'hypothèse

1. Règle de décision

   Si la moyenne de l'échantillon appartient à l'intervalle [89,967 , 90,033] on accepte l'hypothèse H_0 la livraison est dite conforme pour le diamètre au seuil de 0,05%

   Si la moyenne de l'échantillon n'appartient pas à l'intervalle [89,967 , 90,033] on accepte l'hypothèse H_1 la livraison est dite non conforme pour le diamètre au seuil de 0,05%

2. Si la moyenne de l'échantillon $\overline{x} = 90,02$ appartient à l'intervalle [89,967 , 90,033] on accepte l'hypothèse H_0 la livraison est dite conforme pour le diamètre au seuil de 0,05%