MAINTENANCE PRODUCTIQUE 2004

Exercice 1

A. loi normale

1^o La variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne $m = 100$ et d'écart type $\sigma = 0,25$ $\mathcal{N}$ (100 ; 0,25)

La variable aléatoire $T = \frac{X-100}{0,25}$ suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}$ (1 ; 0).

Calculons la probabilité pour qu'une tige soit conforme

$P(99,45 \leq X \leq 100,55) = P\left(\frac{99,45-100}{0,25} \leq T \leq \frac{100,55-100}{0,25}\right) = P\left(-\frac{11}{5} \leq T \leq \frac{11}{5}\right) = \pi\left(\frac{11}{5}\right) - \pi\left(-\frac{11}{5}\right) = 2\pi\left(\frac{11}{5}\right) - 1 = 2 \times 0,9861 - 1 \approx 0,97$

2^o Déterminons h tel que : $P(100 - h \leq X \leq 100 + h) = 0,95$

$P(100 - h \leq X \leq 100 + h) = 0,95$ donc $P\left(\frac{100-h-100}{0,25} \leq T \leq \frac{100+h-100}{0,25}\right) = 0,95$

$P\left(-\frac{h}{0,25} \leq T\frac{h}{0,25}\right) = 0,95$ et $2\pi\left(\frac{h}{0,25}\right) - 1 = 0,95$ alors $\pi\left(\frac{h}{0,25}\right) = 0,975$

Sur la table on lit $\pi(1,96) = 0,975$ donc $\frac{h}{0,25} = 1,96$ et $h = 0,49$

On peut déduire que la longueur des tiges appartient à l'intervalle [99,51 ; 100,49] avec une probabilité de 0,95

B. Loi binomiale et loi de Poisson

1^o La variable aléatoire Y suit une loi binomiale car elle vérifie les conditions suivantes

Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélévement à un tirage avec remise de 50 tiges

et on a deux éventualités et deux seulement la tige est non conforme avec la probabilité $p = 0,03$ ou elle est conforme avec la probabilité $q = 1 - p = 0,97$

La variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètre $n = 50$ et $p = 0,03$ $\mathcal{B}$ (50 ; 0,03).

2^o $P(Y = 2) = C_{50}^2 \times 0,03^2 \times 0,97^{48} \approx 0,26$

3^o $P(Y \leq 2) = P((Y = 0) \cup (Y = 1) \cup (Y = 2)) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)$ car ces événements sont incompatibles deux à deux.

$P(Y \leq 2) = 0,97^{50} + 50 \times 0,03 \times 0,97^{49} + 25 \times 49 \times 0,03^2 \times 0,97^{48} \approx 0,81$

4^o La loi suivie par Y peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 1,5$.

5^o $P(Z = 2) = e^{-1,5}\frac{1,5^2}{2} \approx 0,25$

$P(Z \leq 2) = P((Z = 0) \cup (Z = 1) \cup (Z = 2)) = P(Z = 0) + P(Z = 1) + P(Z = 2) = e^{-1,5} + e^{-1,5} \times 1,5 + e^{-1,5} \times \frac{1,5^2}{2} \approx 0,81$

C. Intervalle de confiance

1^o Le meilleur estimateur ponctuelle de la moyenne μ des diamètres des tiges produites dans cette journée est la moyenne de l'échantillon donc $\mu = 9,99$.

2^o La variable aléatoire $\overline{D}$ suit une loi normale de moyenne μ inconnue et d'écart type $\sigma_{\overline{D}} = \frac{\sigma}{\sqrt{50}} = \frac{0,19}{\sqrt{50}}$

La variable aléatoire $\overline{T} = \frac{\overline{D}-\mu}{\frac{0,19}{\sqrt{50}}}$ suit une loi normale centrée et réduite.

$P(-a \leq \overline{T} \leq a) = 0,95$ si $a = 1,96$ donc $P(-1,96 \leq \overline{T} \leq 1,96) = 0,95$

$P\left(-1,96 \leq \frac{\overline{D}-\mu}{\frac{0,19}{\sqrt{50}}} \leq 1,96\right) = 0,95$

$P\left(-1,96 \times \frac{0,19}{\sqrt{50}} \leq \overline{D} - \mu \leq 1,96 \times \frac{0,19}{\sqrt{50}}\right) = 0,95$

donc $P(\overline{D} - 1,96 \times \frac{0,19}{\sqrt{50}} \leq \mu \leq \overline{D} + 1,96 \times \frac{0,19}{\sqrt{50}}) = 0,95$

L'échantillon a pour moyenne $\overline{x} = 9,99$

L'intervalle de confiance centré sur $\overline{x}$ de la moyenne μ est l'intervalle $[9,99 - 1,96 \times \frac{0,19}{\sqrt{50}}\ ;\ 9,99 + 1,96 \times \frac{0,19}{\sqrt{50}}] = [9,94\ ;\ 10,04]$

3^o l'affirmation «la moyenne μ est obligatoirement dans l'intervalle de confiance» est fausse.

Exercice 2

A. Résolution d'une équation différentielle

1^o Résolvons l'équation différentielle E_0 : $y' + (0,4x)y = 0$.

Les équations différentielles de la forme $a(x)y' + b(x)y = 0$ admettent pour solution $y = Ce^{-F(x)}$ $F(x)$ est une primitive de $f(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$.

$f(x) = 0,4x$ donc $F(x) = 0,4 \times \frac{x^2}{2} = 0,2x^2$

La solution générale de l'équation E_0 est $y = Ce^{-0,2x^2}$.

2^o Montrons que $h(x) = 1$ est solution de l'équation différentielle (E)

$h'(x) = 0$ en remplaçant y' et y par $h'(x)$ et $h(x)$ l'équation différentielle (E) est vérifiée donc $h(x) = 1$ est une solution particulière.

3^o (E) a pour ensemble de solutions les fonctions de la forme $y = Ce^{-0,2x^2} + 1$

4^o La fonction $F(x) = 1 - e^{-0,2x^2}$ est bien de la forme $y = Ce^{-0,2x^2} + 1$ et $F(0) = 0$ donc F est bien la solution particulière de (E) vérifiant $F(0) = 0$.

B. Etude d'une fonction

1^o nous avons $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ on peut en déduire que la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe en $+\infty$

2^o a) $f(x) = 0,4xe^{-0,2x^2}$

Calculons $f'(x)$

$f'(x) = 0,4e^{-0,2x^2} + 0,4x \times (-0,2 \times 2x)e^{-0,2x^2} = 0,4e^{-0,2x^2}(1 - 0,4x^2) = 0,4(1 - \sqrt{0,4}\ x)(1 + \sqrt{0,4}\ x)e^{-0,2x^2}$

b) Signe de $f'(x)$

$0,4e^{-0,2x^2}(1 + \sqrt{0,4}\ x)$ est strictement positif sur l'intervalle $[0\ ,\ +\infty[$ $f'(x)$ est du signe de $1 - \sqrt{0,4}\ x$

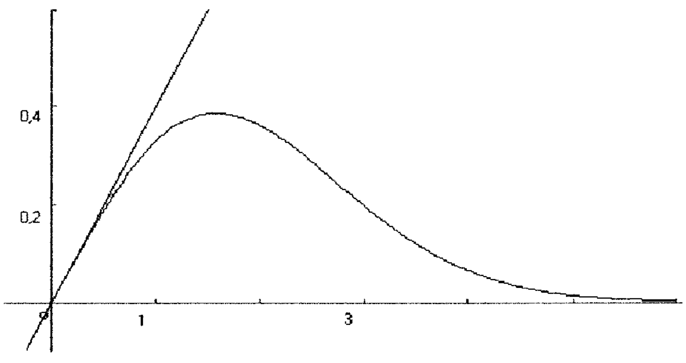
$f'(x)$ est positif sur l'intervalle $[0\ ,\ \frac{\sqrt{0,4}}{0,4}]$ et $f'(x)$ est négatif sur l'intervalle $[\frac{\sqrt{0,4}}{0,4}\ ;\ +\infty[$

c)

x	0		$\frac{\sqrt{0,4}}{0,4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$0,38$	$\searrow$	0

3^o D'après le développement limité on peut déduire qu la tangente a pour équation $y = 0,4x$ et en étudiant le signe de l'expression $-0,08x^3$ on peut déduire que la courbe est sous sa tangente puisque ce terme est négatif pour x positif.

4^o



C. Application à un problème de probabilité

1^o

$P(X \leq 4) = \int_0^4 f(t)dt = \left[1 - e^{-0,2x^2}\right]_0^4 = 1 - e^{-3,2} = 0,96$

2^o a) Montrons que x_0 est solution de l'équation $e^{-x_0^2} = 0,01$

Par hypothèse on a $P(X \leq x_0) = 0,99$ donc $1 - e^{-0,2x_0^2} = 0,99$ et $e^{-0,2x_0^2} = 0,01$.

b) D'après la relation trouvée à la question précédente on peut écrire

$ln(e^{-0,2x_0^2}) = ln(0,01)$ donc $-0,2x_0^2 = ln(0,01)$ et $x_0^2 = -\frac{ln(0,01}{0,2}$

$ln(0,01)$ est négatif donc $-\frac{ln(0,01}{0,2}$ est positif x_0 est la racine positive de l'équation $x_0 = \sqrt{-\frac{ln(0,01)}{0,2}} = 4,80$

c) Cette affirmation est vraie