BTS MAINTENANCE 2003

EXERCICE 1 (9 points)

1^o Défaut d'approvisionnement

a) Les événements A et B sont indépendants donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
$P(E_1) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,04 \times 0,02 = 0,0008$
b) $P(E_2) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,04 + 0,02 - 0,0008 = 0,0592$

2^o Pannes de la machine sur une durée de 100 jours

a) La variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0,5$.
$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,6065 + 0,3033 + 0,0758 = 0,9856$
b) $P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0,6065 + 0,3033 + 0,0758 + 0,0126 + 0,0016 = 0,9998$
c) Déterminons le plus petit entier tel que $P(X \leq n) \geq 0,99$
D'après la question a) on peut déduire qu'il est strictement supérieure à 2 et en utilisant le b) qu'il est strictement inférieur à 4 car $P(X \leq 4) - P(X = 4)$ reste strictement supérieur à 0,99.
Le plus petit entier n est donc 3.

3^o Qualité de l'embouteillage à la sortie.

La variable aléatoire Y suit une loi normale $\mathcal{N}(1,5\ ;\ 0,01)$
Soit $T = \frac{Y-1,5}{0,01}$ La variable aléatoire T suit une loi normale $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$
$P(1,47 \leq X \leq 1,53) = P\left(\frac{1,47-1,5}{0,01} \leq T \leq \frac{1,53-1,5}{0,01}\right) = P(-3 \leq T \leq 3) = \pi(3) - \pi(-3) = \pi(3) - (1 - \pi(3)) = 2\pi(3) - 1 = 2 \times 0,99865 - 1 = 0,9973$

4^o Fiabilité d'une machine à embouteiller

a) Calculons la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans le parc fonctionne plus de 200 jours
$P(T > 200) = e^{(-0,005 \times 200} = e^{-1} = 0,3679$
b) Résolvons l'équation $P(T > t) = 0,8$ donc $e^{-0,005t} = 0,8$
on déduit $-0,005t = ln(0,8)$ et $t = -\frac{ln(0,8)}{0,005} = 44,62$
le nombre de jours est : 44

Exercice 2 (11 points)

A- Résolution d'une équation différentielle

1^o Résolvons l'équation différentielle (E_0) : $y' + y = 0$
Elle a pour solution $y = Ce^{-x}$
2^o Déterminons une solution de l'équation différentielle (E) de la forme $y = Ce^{-x}$ ou C est une fonction de la variable x.
$y' = C'e^{-x} - Ce^{-x}$
Remplaçons y' et y par leur valeur dans (E)
nous avons $C'e^{-x} - Ce^{-x} + Ce^{-x} = 2e^{-x}$ donc $C'e^{-x} = 2e^{-x}$ et $C' = 2 \quad C = 2x + k$
$h(x) = 2xe^{-x}$ est solution particulière de (E)
3^o l'ensemble des solutions de (E) est :$y = Ce^{-x} + 2xe^{-x}$
4^o Déterminons f
$f(x) = Ce^{-x} + 2xe^{-x}$ donc $f(0) = C$ et $f(0) = 3$ donc $C = 3$
$f(x) = 3e^{-x} + 2xe^{-x} = (2x + 3)e^{-x}$

B - Etude d'une fonction

1^o a) La courbe C passe par le point A de coordonnées $(0\ ,\ 3)$ donc $f(0) = 3$
b) Le coefficient directeur m de la droite Δ est égal à : $m = \frac{3}{-3} = -1$ donc $f'(0) = -1$

c) Déterminons les réels $a,\ b$

$f(x) = (ax+b)e^{-x} \quad f'(x) = ae^{-x} - (ax+b)e^{-x} = (-ax+a-b)e^{-x}$

$f(0) = b$ et nous avons $f(0) = 3$ donc $b = 3$.

$f'(0) = a - b$ et $f'(0) = -1$ donc $a - b = -1 \quad a - 3 = -1 \quad a = 2$

$f(x) = (2x+3)e^{-x}$.

2^o a) $f'(x) = 2e^{-x} - (2x+3)e^{-x} = (-2x-3+2)e^{-x} = (-2x-1)e^{-x}$

b) Résolvons $f'(x) \geq 0$

e^{-x} est strictement positif donc $f'(x) \geq 0$ si $-2x-1 \geq 0$ donc $x \leq -\frac{1}{2}$

c)

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$2\sqrt{e}$	$\searrow$

3^o a) Le développement limité à l'ordre 2 de e^x est : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)$

Le développement limité à l'ordre 2 de e^{-x} est : $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x)$ avec

$$\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$$

b) Le développement limité à l'ordre 2 de $f(x)$

$f(x) = (2x+3)(1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x)) = 2x + 3 - 2x^2 - 3x + \frac{3x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) = 3 - x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec

$$\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

C - Calcul intégral

1^o $f(x) = -f'(x) + 2e^{-x}$ donc $F(x) = -f(x) - 2e^{-x} = (-2x-5)e^{-x}$

2^o a) $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = [(-2x-5)e^{-x}]_0^{\frac{1}{2}} = -6e^{-\frac{1}{2}} - (-5) = 5 - 6e^{-\frac{1}{2}}$

b) $I = 1,361$.

3^o $J = \int_0^{\frac{1}{2}}(3 - x + \frac{1}{2}x^2)dx = \left[3x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}} = (\frac{3}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{48} = \frac{72-6-1}{48} = \frac{65}{48}$

b) $J = 1,354$

c) $|I - J| = 1,361 - 1,354 = 0,007$

les valeurs approchées diffèrent de moins 10^{-2}.