

Exercice 1

1° Etude du nombre de sinistres par véhicule

La variable aléatoire  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda = 0,28$  donc  $P(X = k) = e^{-0,28} \frac{0,28^k}{k!}$

a)  $P(A) = P(X = 0) = e^{-0,28} = 0,756$ .

b)  $P(B) = P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = e^{-0,28} (1 + 0,28 + \frac{0,28^2}{2}) = 0,997$

2° Etude du nombre de sinistres dans une équipe de 15 conducteurs

a) La variable aléatoire  $Y$  suit une loi binomiale car on considère que le tirage de 15 conducteurs dans l'effectif peut être assimiler à un tirage avec remise, de plus nous avons deux possibilités le conducteur n'a pas eu de sinistre avec la probabilité  $p = 0,6$  ou a eu des sinistres avec la probabilité  $q = 1 - p = 0,4$

$Y$  suit une loi binomiale de paramètre  $n = 15$  et  $p = 0,6$   $B(15 ; 0,6)$ .

b)  $P(Y = 10) = C_{15}^{10} \times (0,6)^{10} \times (0,4)^5 = 0,186$ .

3° Etude du coût des sinistres

La variable aléatoire  $C$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(1200 ; 200)$

$P(1000 \leq C \leq 1500) = P(\frac{1000-1200}{200} \leq \frac{C-1200}{200} \leq \frac{1500-1200}{200}) = P(-1 \leq \frac{C-1200}{200} \leq 1,5) = \pi(1,5) - \pi(-1) = \pi(1,5) - (1 - \pi(1)) = \pi(1,5) + \pi(1) - 1 = 0,9332 + 0,8413 - 1 = 0,775$

4°

a) Le meilleur estimateur ponctuel du pourcentage  $p$  de véhicules de ce parc qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service est :  $p = f = \frac{91}{100} = 0,91$ .

b) La variable aléatoire  $F$  qui a tout échantillon de 100 véhicules prélevés au hasard et avec remise dans ce parc, associe le pourcentage  $p$  de véhicules qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service suit une loi normale  $\mathcal{N}(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{100}})$ .

Soit  $T = \frac{F-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}}$  La variable aléatoire  $T$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

$P(-t \leq T \leq t) = 0,95$  si  $2\pi(t) - 1 = 0,95$  donc  $t = 1,96$ .

Nous avons donc :

$P\left[-1,96 \leq \frac{F-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}} \leq 1,96\right] = 0,95$

$P\left[-1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}} \leq F - p \leq 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}\right] = 0,95$

$P\left[-F - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}} \leq -p \leq -F + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}\right] = 0,95$

$P\left[F + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}} \geq p \geq F - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}\right] = 0,95$

$P\left[F - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}} \leq p \leq F + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}\right] = 0,95$

Le meilleur estimateur ponctuelle de l'écart-type  $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$  est :  $\sqrt{\frac{n}{n-1}} \times \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} = \sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}$  puisque  $p$  est inconnu

on déduit l'écart-type  $\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}$  a pour meilleur estimateur  $\sqrt{\frac{f(1-f)}{99}}$

et l'intervalle  $[f - 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{99}}, f + 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{99}}]$  est l'intervalle de confiance de  $p$  avec le coefficient de confiance 0,95

$p \in [0,854 ; 0,966]$

c) Cette affirmation est fausse.

a)

Nombre de sinistres : $x_i$	0	1	2	3	4
$y_i = \ln(n_i)$	7, 20	6, 23	5, 43	4, 36	3, 56

b) la droite de régression de  $y$  en  $x$  a d'après la calculatrice pour équation  $y = -0,92x + 7.19$

c) pour 6 sinistres nous avons  $y = -0,92 \times 6 + 7,19 = 1,67$  donc  $e^{1,67} = 5,31$  et le nombre de véhicules ayant eu 6 sinistres est de 5.

## Exercice 2

### A. Résolution d'une équation différentielle

1° Résolvons l'équation différentielle ( $E_0$ ) :  $y'' - y' - 2y = 0$

Elle admet pour équation caractéristique  $r^2 - r - 2 = 0$

Cette équation admet une racine évidente  $r_1 = -1$  donc  $r_2 = 2$

( $E_0$ ) a pour solution  $y = Ae^{-x} + Be^{2x}$

2° Montrons que  $h$  est solution particulière de ( $E$ ).

Calculons  $h'$  et  $h''$  et remplaçons dans ( $E$ ).

$$h(x) = (x^2 + 2x)e^{-x} \quad h'(x) = -(x^2 + 2x)e^{-x} + (2x + 2)e^{-x}$$

$$h''(x) = (x^2 + 2x)e^{-x} - 2(2x + 2)e^{-x} + 2e^{-x}$$

$$(x^2 + 2x)e^{-x} - 2(2x + 2)e^{-x} + 2e^{-x} + (x^2 + 2x)e^{-x} - (2x + 2)e^{-x} - 2(x^2 + 2x)e^{-x} = (-6x - 4)e^{-x}$$

$$-3(2x + 2)e^{-x} + 2e^{-x} = (-6x - 4)e^{-x}$$

L'égalité est bien vérifiée  $h$  est une solution particulière de ( $E$ ).

3° ( $E$ ) admet pour solution  $y = Ae^{-x} + Be^{2x} + (x^2 + 2x)e^{-x}$

4° Déterminons la solution particulière  $f$  de ( $E$ ) telle que :  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 1$

$$f(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + (x^2 + 2x)e^{-x} \text{ donc } f(0) = A + B \text{ et } A + B = 0$$

$$f'(x) = -Ae^{-x} + 2Be^{2x} - (x^2 + 2x)e^{-x} + (2x + 2)e^{-x} \text{ donc } f'(0) = -A + 2B + 2 \text{ et } -A + 2B = -1$$

Résolvons le système :

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -A + 2B = -1 \end{cases}$$

donc  $3B = 0$   $B = 0$  et  $A = 1$

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1)e^{-x} = (x + 1)^2 e^{-x}.$$

### B. Etude d'une fonction

a)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1)^2 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

b)

On sait que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x + 1)e^{-x} = 0$

c) On peut déduire que la droite d'équation  $y = 0$  est une asymptote à la courbe

2°

a) Calculons  $f'(x)$

$$f'(x) = 2(x + 1)e^{-x} - (x + 1)^2 e^{-x} = (x + 1)[2 - (x + 1)]e^{-x} = (x + 1)(1 - x)e^{-x} = (1 - x^2)e^{-x}$$

b) Résolvons  $f'(x) \geq 0$

$e^{-x}$  est strictement positif sur  $\mathbb{R}$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $1 - x^2$

$1 - x^2$  est une expression du second degré. Elle s'annule pour les valeurs  $-1$  ;  $1$ , elle est du signe de  $-a$  entre les racines.

$1 - x^2$  est positif sur l'intervalle  $[-1 ; 1]$  donc  $f'(x) \geq 0$  si  $x \in [-1 ; 1]$

c)

$f'(x) \leq 0$  si  $x \in ]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$  donc  $f$  est décroissante sur l'ensemble  $]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$

$f'(x) \geq 0$  si  $x \in [-1 ; 1]$  donc  $f$  est croissante sur  $[-1 ; 1]$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$+\infty$			$\frac{4}{e}$		$0$

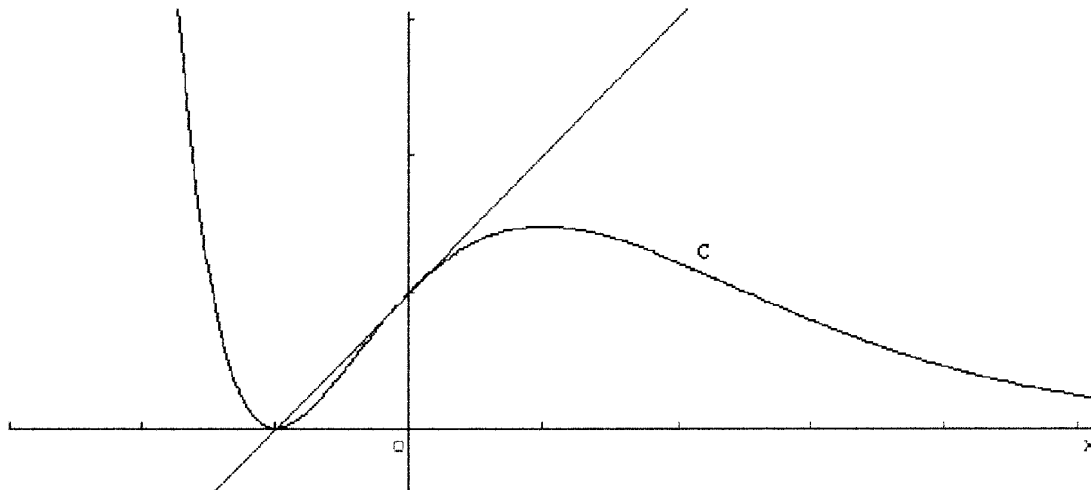
3° a)  $e^t$  a pour développement limité à l'ordre 2 :  $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)$  avec  $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$

donc  $e^{-x}$  a pour développement limité à l'ordre 2 :  $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

b)  $(1 + 2x + x^2)(1 - x + \frac{x^2}{2}) = 1 + 2x + x^2 - x - 2x^2 + \frac{x^2}{2} = 1 + x - \frac{x^2}{2}$  en conservant que les termes de degré inférieur ou égal à 2

donc  $f(x)$  a pour développement limité à l'ordre 2 :  $f(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

c) La tangente  $T$  à la courbe  $C$  au point d'abscisse 0 a pour équation  $y = x + 1$   
 $f(x) - y = -\frac{x^2}{2}$  donc la courbe est sous sa tangente en ce point



### C. Calcul intégral

1° a)  $f$  est solution de l'équation différentielle (E) donc  $f''(x) - f'(x) - 2f(x) = (-6x - 4)e^{-x}$  de cette égalité on peut déduire  $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{2}[f''(x) - f'(x) + (6x + 4)e^{-x}]$$

b) Calculons la dérivée de  $F$

$$F'(x) = \frac{1}{2}[f''(x) - f'(x) + (6x + 10)e^{-x} - 6e^{-x}] = \frac{1}{2}[f''(x) - f'(x) + (6x + 4)e^{-x}] = f(x)$$

c) En remplaçant  $f(x)$  et  $f'(x)$  par leurs valeurs dans l'expression de  $F(x)$  on déduit :

$$F(x) = \frac{1}{2}[(1 - x^2)e^{-x} - (x^2 + 2x + 1)e^{-x} - (6x + 10)e^{-x}] = \frac{1}{2}[1 - x^2 - x^2 - 2x - 1 - 6x - 10]e^{-x} = (-x^2 - 4x - 5)e^{-x}$$

2° Calculons  $A$  en unités d'aire

$$A = \int_{-1}^0 f(x)dx = [(-x^2 - 4x - 5)e^{-x}]_{-1}^0 = -5 - (-1 + 4 - 5)e = 2e - 5.$$