MAINTENANCE PRODUCTIQUE 2001

Exercice 1

Partie A

1. X suit une loi binomiale car on prélève 10 pièces dans un stock assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélévement à un tirage avec remise et on a deux éventualités la pièce est conforme ou ne l'est pas.

X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(10\ ;\ 0,9)$.

2. $P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(x = 10) = C_{10}^{8}\, 0,9^{8}\, 0,1^{2} + C_{10}^{1}\, 0,9^{9}\, 0,1 + 0,9^{10} = 0,781$

Partie B

1° M suit une loi normale $\mathcal{N}(250\ ;\ 1,94)$

$P(246 \leq M \leq 254) = P\left(-\frac{4}{1,96} \leq \frac{M-250}{1,96} \leq \frac{4}{1,96}\right) = P\left(-2,04 \leq \frac{M-250}{1,96} \leq 2,04\right) = 2\pi(2,04) - 1 = 0,959$

2° N suit une loi normale $\mathcal{N}(150\ ;\ 1,52)$

$P(147 \leq N \leq 153) = P\left(-\frac{3}{1,52} \leq \frac{N-150}{1,52} \leq \frac{3}{1,52}\right) = P\left(-1,97 \leq \frac{N-150}{1,52} \leq 1,97\right) = 2\pi(1,97) - 1 = 0,951$

3. Les variables aléatoire M et N sont indépendantes donc

$P\left((246 \leq M \leq 254), (147 \leq N \leq 153)\right) = P(246 \leq M \leq 254) \times P(147 \leq N \leq 153) = 0,959 \times 0,951 = 0,912$

Partie C

1. $p(A) = 0,6$ $P(B) = 1 - P(A) = 0,4$ $P(C/A) = 0,914$ $P(C/B) = 0,879$

2. $P(C \cap A) = P(A) \times P(C/A) = 0,6 \times 0,914 = 0,548$

$P(C \cap B) = P(B) \times P(C/B) = 0,4 \times 0,879 = 0,352$

3. $P(C) = P\left((C \cap A) \cup (C \cap B)\right) = P(C \cap A) + P(C \cap B) = 0,548 + 0,352 = 0,8$

Exercice 2

A. Résolution d'une équation différentielle.

1° Résolvons l'équation différentielle (E_o) : $y' - 2y = 0$

elle est de la forme $y' + ay = 0$ qui admet comme solution $y = Ce^{-ax}$

(E_o) apour solution $y = Ce^{2x}$

2. Calculons $h'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x}$

donc $h'(x) - 2h(x) = e^{2x}$

h vérifie l'équation différentielle (E) h est une solution particulière de (E)

3. L'ensemble des solutions de (E) $\quad y = Ce^{2x} + xe^{2x}$

4. Déterminons la solution particulière f de (E)

$f(x) = Ce^{2x} + xe^{2x}$ et $f(0) = -1$ donc $C = -1$

$f(x) = -e^{2x} + xe^{2x} = (x - 1)e^{2x}$

B. Étude d'une fonction

1° a)

$$\lim_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty \ \textit{donc} \ \lim_{x \to +\infty} (x-1)e^{2x} = +\infty$$

b) $f(x) = xe^{2x} - e^{2x}$

$$\lim_{x \to -\infty} xe^{2x} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} e^{2x} = 0 \quad \textit{donc} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

c) On peut déduire que la courbe représentative de la fonction f admet l'axe des abscisses comme asymptote quand x tend vers $+\infty$

2° a) $f'(x) = e^{2x} + 2(x-1)e^{2x} = (2x-1)e^{2x}$

b) $e^{2x} > 0$ donc $f'(x) \geq 0$ si $2x - 1 \geq 0 \quad x \geq \frac{1}{2}$

c)

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{e}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

3° a) e^x a pour développement limité à l'ordre 3

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$

donc $e^{2x} = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$

b) $f(x) = (x-1)(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)) = x + 2x^2 + 2x^3 - 1 - 2x - 2x^2 - \frac{4x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) = -1 - x + \frac{2x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$

c) Une équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ est : $y = -x - 1$

Calculons $f(x) - y$ est déterminons son signe : $f(x) - y = \frac{2}{3}x^3$

$f(x) - y \geq 0$ si $x \geq 0$ et la courbe est au dessus de la tangente

$f(x) - y \leq 0$ si $x \leq 0$ et la courbe est au dessous de la tangente

C. Calcul intégral

$I(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)dx$

faisons une intégration par parties

$$\begin{array}{rclrcl} u & = & x-1 & du & = & dx \\ dv & = & e^{2x}dx & v & = & \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}$$

$I(\alpha) = [\frac{1}{2}(x-1)e^{2x}]_\alpha^0 - \frac{1}{2}\int_\alpha^0 e^{2x}dx = [\frac{1}{2}(x-1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}]_\alpha^0 = [(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4})e^{2x}]_\alpha^0 = -\frac{3}{4} - (\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{4})e^{2\alpha}$

2° a)

$$\lim_{\alpha \to -\infty} \alpha e^{2\alpha} = 0 \;\; et \;\; \lim_{\alpha \to -\infty} e^{2\alpha} = 0 \;\; donc \lim_{\alpha \to -\infty} (\frac{1}{2}alpha - \frac{3}{4})e^{2\alpha} = 0 \;\; et \;\; \lim_{\alpha \to -\infty} I(\alpha) = -\frac{3}{4}$$

b) l'aire a pour valeur $\frac{3}{4}$ ou l'intégrale est convergente.