MAINTENANCE 2000 MIE3MAT

Exercice I

A.Pannes mécaniques sur le bras articulé.

1° Le stock est supposé suffisamment important pour que le tirage des 300 robots soient considérées avec remise donc indépendants

A chaque tirage élémentaire la probabilité d'obtenir un robot en panne est de 0,05.

Donc la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $n = 300$ et $p = 0,05$.

2°

X est une loi binomiale de moyenne $m = n.p = 15$ et d'écart-type $\sqrt{npq} = 3,77$ On peut approchée X par une loi qui aura même moyenne et écart-type que X et $m = 15$ et $\sigma = 3,77$ impose que cette variable aléatoire Y soit une loi normale de moyenne $\mu = 15$ et d'écart-type $\sigma = 3,77$.

3°

$P(Y \geq 20,5) = 1-P(Y \leq 20,5) = 1-P\left(\frac{Y-15}{3,77} \leq \frac{20,5-15}{3,77}\right) = 1-\pi\left(\frac{5,5}{3,77}\right) = 1-\pi(1,46) = 0,0721.$

B.Défaillance des groupes hydauliques

1°

$P(D) = P((A \cap D) \cup (B \cap D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = P(A).P(D/A) + P(B).P(D/B) = \frac{1}{3}.0,03 + \frac{2}{3}.0,02 = 0,023.$

2° $P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{3}{7} = 0,429.$

C.Maintenance du système de électronique des armoires de contrôle.

1° *a)*

D'après le résultat $r^2 = 0,9882$ donc $r = 0,994$ il y a une forte corrélation entre x et y l'ajustement linéaire est justifié

b)

L'ajustement est une droite et d'après la relation $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}$ équivaut à $y = \beta x - \beta ln\eta$ on peut dire que T suit une loi de Weibull de paramètre $\gamma = 0$.

c)

De l'équation $y = 1,7522x - 8,2171$ et de la relation $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}$ équivaut à $y = \beta x - \beta ln\eta$ on peut déduire :

$\beta = 1,75$ et $\eta = e^{\frac{8,2171}{1,7522}} = 108,8 = 109$

2°

La périodicité d'intervention pour une fiabilité de 80%.

$$\begin{aligned}
R(t) &= 0{,}80 \\
e^{-\left(\frac{t}{109}\right)^{1,75}} &= 0{,}80 \\
-\left(\frac{t}{109}\right)^{1,75} &= ln(0,80) \\
\left(\frac{t}{109}\right)^{1,75} &= -ln(0,80) \\
e^{ln\left(\frac{t}{109}\right)^{1,75}} &= -ln(0,80) \\
e^{1,75ln\left(\frac{t}{109}\right)} &= -ln(0,80) \\
1,75ln\frac{t}{109} &= ln\left(-ln(0,80)\right) \\
\frac{t}{109} &= e^{\frac{1}{1,75}ln(-ln(0,80))}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{t}{109} & = & e^{\frac{1}{1,75}ln(-ln(0,80))} \\ t & = & 109e^{\frac{1}{1,75}ln(-ln(0,80))} \\ t & = & 46,25 \end{array}$$

La périodicité doit être de 46 jours.

Exercice II

A.Résolution d'une équation différentielle

1°

Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_o) : $y" - 4y = 0$

elle a pour équation caractéristique $r^2 - 4 = 0$ les solutions sont $r_1 = 2$ et $r_2 = -2$

(E_o) a pour solution $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$.

2°

$g(x) = \frac{4}{3}xe^{-2x}$ donc $g'(x) = \frac{4}{3}e^{-2x} - \frac{8}{3}xe^{-2x}$ et $g"(x) = -\frac{8}{3}e^{-2x} - \frac{8}{3}e^{-2x} + \frac{16}{3}xe^{-2x} = -\frac{16}{3}e^{-2x} + \frac{16}{3}xe^{-2x}$.

En remplaçant g et g'' par leur valeur dans (E) on a :

$-\frac{16}{3}e^{-2x} + \frac{16}{3}xe^{-2x} - 4\frac{4}{3}xe^{-2x} = -\frac{16}{3}e^{-2x}$.

L'égalité est bien vérifiée donc g est solution particyulière de (E).

3°

L'ensemble des solutions de (E) : $y = Ae^{2x} + Be^{-2x} + \frac{4}{3}xe^{-2x}$.

4°

la solution particulière h de (E) vérifiant $h(0) = \frac{4}{3}$ et $h'(0) = -\frac{4}{3}$ vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{llcl} A & +B & = & \frac{4}{3} \\ & & = & \\ 2A & -2B & = & -\frac{8}{3} \end{array} \right.$$

car $h'(x) = 2Ae^{2x} - 2Be^{-2x} + \frac{4}{3}e^{-2x} - \frac{8}{3}e^{-2x}$

$A = 0$ et $B = \frac{4}{3}$.

$$h(x) = \frac{4}{3}(1+x)e^{-2x}.$$

B.Etude d'une fonction

1o *a)*

$f(x) = \frac{4}{3}(1+x)e^{-2x}$ donc $f'(x) = \frac{4}{3}(e^{-2x} - 2(1+x)e^{-2x}) = -\frac{4}{3}(2x+1)e^{-2x}$.

b)

$2x+1$ et e^{-2x} sont positifs sur $[0\ ;+\infty[$ donc $f'(x)$ est toujours négatif sur cet intervalle et f est strictement décroissante.

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	$\frac{4}{3}$ $\searrow$ 0

2°

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \ car \ \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \ et \ \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

La courbe admet l'axe des abscisses comme asymptote.

3° *a)*

e^t apour développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 : $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + t^3\varepsilon(t)$

donc e^{-2x} a pour développement :
$e^{-2x} = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$

b)

$f(x) = \frac{4}{3}(1+x)\left(1 - 2x + 2x^2 - \frac{4x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)\right) = \frac{4}{3} - \frac{8}{3}x + \frac{8}{3}x^2 - \frac{16}{9}x^3 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$.

c)

D'après le b) onpeut en déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet pour tangente $\mathcal{T}$ d'équation $y = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$ et la courbe est située sous la tangente.

4° *a)*

$$I = \int_0^3 f(x)dx = \frac{4}{3}\int_0^3 (x+1)e^{-2x}dx$$

$$\begin{array}{rclcrcl} u & = & x+1 & \qquad & du & = & dx \\ dv & = & e^{-2x}dx & & v & = & -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array}$$

$I = \frac{4}{3}\left([-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}]_0^3 + \frac{1}{2}\int_0^3 e^{-2x}dx\right) = \frac{4}{3}\left(-2e^{-6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}[e^{-2x}]_0^3\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} - 2e^{-6} - \frac{1}{4}e^{-6} + \frac{1}{4}\right) = 1 - 3e^{-6} = 0,99$

L'aire limitée par la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équation $y = 0$, $x = 0$ *et* $x = 6$ et donnée par I en unité d'aire.

b)

$$\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{2}{3}t - 1\right)e^{-2t} = 0$$

c)

$$J = \lim_{t\to+\infty} A(t) = 1$$

d)

$J - I = 3e^{-6}$ donc $0 \leq J - I \leq 0,01$

L'aire limitée par la courbe l'axe des abscisses et pour $x \geq 3$ est inférieure à0,01u.a.