MAINTENANCE 1997 GDP MA 7

Exercice I

1°*Etude du cas* $\beta = 1$

a)

b)

$F_1(t) = \int_0^t e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^t = 1 - e^{-t}$

Donc $P(T \leq 1) = F_1(1) = 1 - e^{-1} = 0,632$

c)

Pour calculer $I(t)$ on va faire une intégration par parties

$$\begin{array}{rclcrcl} u &=& x & \quad & du &=& dx \\ dv &=& e^{-x}dx & & v &=& -e^{-x} \end{array}$$

$I(t) = \int_0^t xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^t + \int_0^t e^{-x}dx = -te^{-t} + [-e^{-x}]_0^t = -te^{-t} - e^{-t} + 1$

$E(T) = \lim_{t \to +\infty} I(T) = 1 \qquad \lim_{t \to +\infty} te^{-t} = 0 \qquad \lim_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$

2°*a)*

Etudions les variations de f_2

$f_2(t) = 2te^{-t^2}$ donc $f_2'(t) = 2e^{-t^2} - 4t^2e^{-t^2} = 2e^{-t^2}\left(1 - 2t^2\right) = 2e^{-t^2}(1 - \sqrt{2}t)(1 + \sqrt{2}t)$

$f_2'(t)$ s'annule pour $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et les expressions $2e^{-t^2}$ et $1 + \sqrt{2}t$ sont positives $f_2'(t)$ est du signe de $1 - \sqrt{2}t$

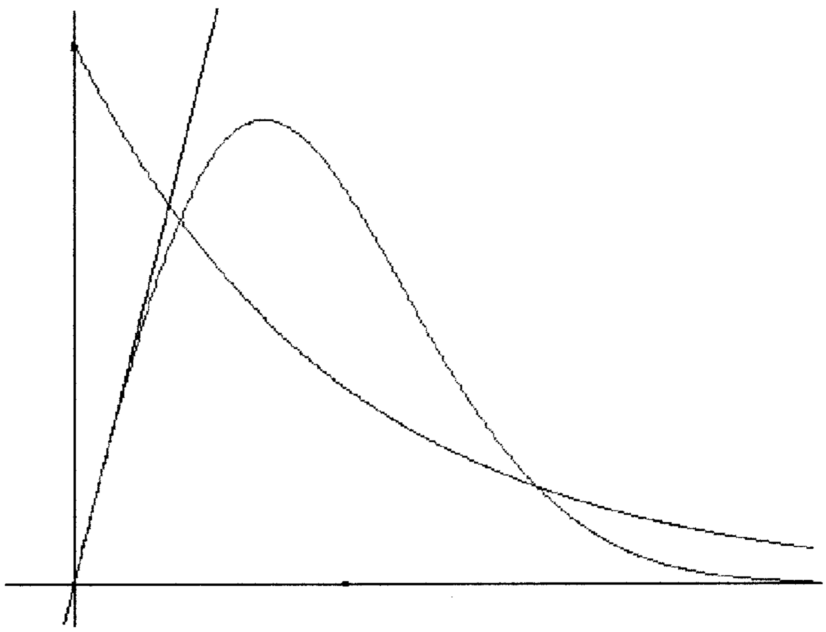
t	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f_2'(t)$		$+$	0	-	
$f_2(t)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

b)

Le développement limité de e^u à l'ordre 1est : $e^u = 1 + u + u\varepsilon(u)$ donc le développement de $e^{-t^2} = 1 - t^2 + t^2\varepsilon(t)$ et $f_2(t) = 2t - 2t^3 + t^3\varepsilon(t)$

L'équation de la tangente est y=2t et la courbe est au dessous de la tangente car $-2t^3 \leq 0$ pour $t \geq 0$.

c)



d)

Si on pose $u = -x^2$ alors $du = -2xdx$ et pour $x = 0$ alors $u = 0$ et pour $x = t$ alors $u = -t^2$.

$F_2(t) = \int_0^t f_2(x)dx = -\int_0^{-t^2} e^u du = [-e^u]_0^{-t^2} = 1 - e^{-t^2}$

$P(T \leq t) = 0,05$ alors $1 - e^{-t^2} = 0,05$, $e^{-t^2} = 0,95$, $t^2 = -ln(0,95)$ et $t = \sqrt{-ln(0,95)} = 0,226$ car $t \geq 0$

Exercice II

A) Première partie :

Puisque X suit une loi normale $\mathcal{N}$ (40 ; 0,045) et l'échantillon a 5 éléments la loi d'échantillonnage $\overline{X}$ à pour moyenne 40 et pour écart-type $\sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ donc $\sigma' = \frac{0,045}{\sqrt{5}} = 0,020$

2°

Calculons $p_1 = P(m - 2\sigma' \leq \overline{X} \leq m + 2\sigma') = P\left(-2 \leq \frac{\overline{X}-m}{\sigma'} \leq 2\right) = 2\pi(2) - 1 = 0,95$

On calculera de même $p_2 = 2\pi(3) - 1 = 1$

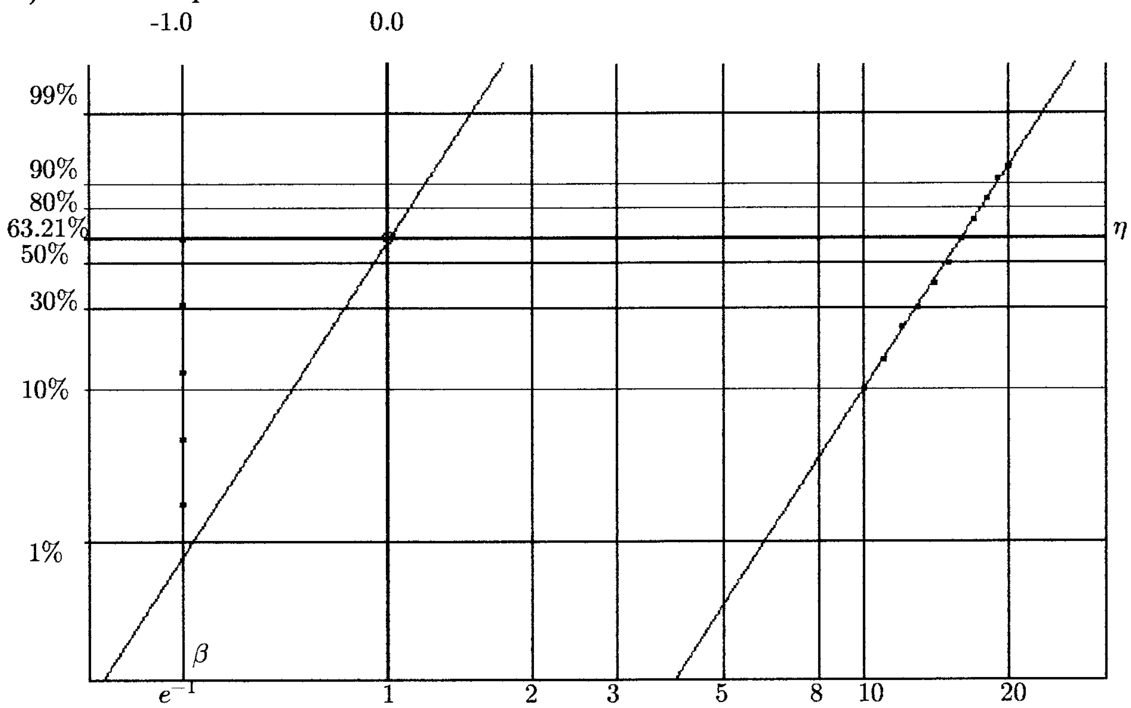
$p_3 = P(\overline{X} \leq 39,95) = P\left(\frac{\overline{X}-40}{0,020} \leq -\frac{0,05}{0,02}\right) = \pi(-2,5) = 1 - \pi(2,5) = 1 - \pi(2,5) = 0,01$

3°

Calculons la probabilité pour qu'un éhantillon soit dans la zone de surveillance.

$p_4 = P(39,94 \leq \overline{X} \leq 40,06) - P(39,96 \leq \overline{X} \leq 40,04) = p_2 - p_1 = 0,05$

B) Deuxieme partie :



Le nuage de points expérimentaux obtenu est à peu près rectiligne sur le papier de Weibull la variable T suit une loi de Weibull de paramètre $\gamma = 0$, $\eta = 16$ *et* $\beta = 5$

donc $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{16}\right)^5}$

2°

Le temps moyen de bon fonctionnement MTBF=$\eta A + \gamma$ puisque $\beta = 5$ alors A=0,9182 d'après la table donc

MTBF=16 . 0,9182 + 0 =14,69 et $P(T \geq 14,69) = R(14,69) = 0,52$.

3°

D'aprés le graphique la fiabilité est de 0,90 si $F(t) = 0,10$ donc $t = 10$

Par le calcul

$$\begin{aligned}
R(t) &= 0{,}90 \\
e^{-(\frac{t}{16})^5} &= 0{,}90 \\
-(\tfrac{t}{16})^5 &= ln(0,90) \\
(\tfrac{t}{16})^5 &= -ln(0,90) \\
e^{ln(\frac{t}{16})^5} &= -ln(0,90) \\
e^{5ln(\frac{t}{16})} &= -ln0,90 \\
5ln\tfrac{t}{16} &= ln\,(-ln(0,90)) \\
\tfrac{t}{16} &= e^{\frac{1}{5}ln(-ln(0{,}90))} \\
\tfrac{t}{16} &= e^{\frac{1}{5}ln(-ln(0{,}90))} \\
t &= 16e^{\frac{1}{5}ln(-ln(0{,}90))} \\
t &= 10{,}2
\end{aligned}$$