

EXERCICE I

I. Résolution d'une équation différentielle

1° Résolvons l'équation différentielle (E) : $(1 + t^2)x' + 2tx = 0$

L'équation différentielle est de la forme $a(t)x' + b(t)x = 0$ si on pose $f(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$ elle admet pour solution $x(t) = Ce^{-F(t)}$ ou F est une primitive de f .

$$f(t) = \frac{2t}{1+t^2} \text{ donc } F(t) = \ln(1+t^2)$$

$$x(t) = Ce^{-\ln(1+t^2)} = Ce^{\ln\left(\frac{1}{1+t^2}\right)} = \frac{C}{1+t^2}$$

Une solution de l'équation différentielle (E) est $x(t) = \frac{C}{1+t^2}$

2°

déterminons la solution particulière f de l'équation différentielle vérifiant $f(0) = 1$

$$f(t) = \frac{C}{1+t^2} \text{ puisque } f(0) = 1 \text{ alors } C = 1 \text{ et } f(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

II. Calcul intégral

1° a)

$$A = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(t)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{donc } A = \frac{\pi}{4}$$

b)

$$B = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2$$

$$\text{donc } B = \frac{1}{2}\ln 2$$

2° a)

$$\frac{t^2}{t^2+1} \text{ peut s'écrire } \frac{t^2+1-1}{t^2+1} = 1 - \frac{1}{t^2+1}$$

$$\text{donc } \frac{t^2}{t^2+1} = 1 - \frac{1}{t^2+1}$$

b)

$$C = \int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1} dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = \int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$\text{La valeur exacte de } C = \frac{4-\pi}{4}$$

III. Application

1° Montrons que $M = A - 2B + C$

$$M = \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{1-2t+t^2}{1+t^2} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^2} - 2\frac{t}{1+t^2} + \frac{t^2}{1+t^2}\right) dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt - 2 \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt + \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt$$

$$\text{donc } M = A - 2B + C.$$

2°

$$\text{La valeur exacte de } M = \frac{\pi}{4} - \ln 2 + 1 - \frac{\pi}{4} = 1 - \ln 2$$

EXERCICE II

1° X suit une loi normale $\mathcal{N}(400; 40)$

La probabilité pour qu'un moteur ne soit pas commercialisable est

$$P(X \leq 318) = P\left(\frac{X-400}{40} \leq \frac{318-400}{40}\right) = P\left(\frac{X-400}{40} \leq \frac{-41}{20}\right) = \pi(-2,05) = 1 - \pi(2,05) = 1 - 0,9798 = 0,0202$$

2° a) Y suit une loi binomiale de paramètre $n=50$ et $p=0,02$ puisque l'on considère un prélèvement aléatoire avec remise avec deux éventualités, la réalisation de l'épreuve le moteur est commercialisable ou il ne l'est pas.

$$P(Y = 2) = C_{50}^2 (0,02)^2 (0,98)^{48} = 0,186$$

b) Y peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 50 \times 0,02 = 1$

$$P(Y \leq 3) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) = e^{-1} \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = \frac{16e^{-1}}{6} = 0,981$$

						Total
Durée de vie	320	360	400	440	480	
Effectifs	7	21	48	16	8	100
$X_i = x_i - 400$	-80	-40	0	40	80	
$n_i \cdot X_i$	-560	-840	0	640	640	-120
X_i^2	6400	1600	0	1600	6400	
$n_i \cdot X_i^2$	44800	33600	0	25600	51200	155200

$$\bar{X} = \frac{-120}{100} = -1,2$$

la moyenne m_1 de cette série statistique est $m_1 = 400 - 1.2 = 398,8$

L'écart type de X est égal à l'écart type σ_1 donc

$$\sigma_1 = \sqrt{1552 - (-1,2)^2} = \sqrt{1550.56} = 39,38$$

2^oa)

La variable aléatoire \bar{X}_1 suit une loi normale $\mathcal{N}_1(398,8 ; 3,94)$.

La variable aléatoire \bar{X}_2 suit une loi normale $\mathcal{N}_2(406,8 ; 4,05)$.

la variable aléatoire D suit d'après les échantillons une loi normale $\mathcal{N}_D(M_1 - M_2 ; 5,7)$

Avec l'hypothèse $H_0 : M_1 = M_2$ et l'hypothèse alternative $M_1 \neq M_2$

Sous l'hypothèse $H_0 : D$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0 ; 5,7)$

$$P(-h \leq D \leq h) = 0,95$$

$$P\left(\frac{-h}{5,7} \leq \frac{D}{5,7} \leq \frac{h}{5,7}\right) = 0,95$$

$$2\pi\left(\frac{h}{5,7}\right) - 1 = 0,95$$

$$\pi\left(\frac{h}{5,7}\right) = 0,975$$

$$\frac{h}{5,7} = 1,96$$

$$h = 11,2 \text{ donc l'intervalle est : } I = [-11,2 ; 11,2]$$

b)

Si la différence des moyennes des échantillons des deux productions appartient à I on peut accepter

l'hypothèse H_0 les deux productions ont la même moyenne avec un risque de 5%

sinon on accepte l'hypothèse alternative H_1 .

c)

$m_1 - m_2 = 398,8 - 406,8 = -8$ la différence appartient à l'intervalle

On peut admettre que les deux productions ont même moyenne.