corr

BTS MAINTENANCE INDUSTRIELLE

Session 1995

CORRIGE MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

A. 1° Les solutions de l'équation $y' - xy = 0$ sont définies sur |R par $y(x) = C\, e^{-G(x)}$ où G est une primitive de la fonction g définie sur |R par $g(x) = x$ et C un nombre réel quelconque.

On a donc $y(x) = C\, e^{-\frac{1}{2}x^2}$ où C est un nombre réel quelconque.

2° h est une solution de (E) si et seulement si pour tout x on a : $h'(x) + x\,h(x) = x^2 e^{-x}$.

$h(x) = (ax+b)\,e^{-x}$ donc $h'(x) = (a - ax - b)\,e^{-x}$, $h'(x) = (-ax + a - b)\,e^{-x}$.

On doit avoir pour tout x réel $(-ax+a-b)\,e^{-x} + x(ax+b)\,e^{-x} = x^2 e^{-x}$,

c'est-à-dire $a x^2 + x(b-a) + (a-b) = x^2$, d'où $a = 1$ et $b - a = 0$ c'est-à-dire $b = 1$.

On a donc $h(x) = (x+1)\,e^{-x}$.

3° L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions définies sur |R par :

$$f(x) = C\, e^{-\frac{1}{2}x^2} + (x+1)\,e^{-x} \text{ où C est un nombre réel quelconque.}$$

B. 1° On lit dans le formulaire que $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$.

$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

En effectuant la multiplication de ce développement par $(x+1)$ et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à deux on obtient le développement limité d'ordre 2 de f au voisinage de 0 : $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

2° Une équation de la tangente à C au point d'abscisse 0 est $y = 1$.

$f(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + x^2 e(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

$f(x) - 1 \leq 0$ pour x assez voisin de 0. On en déduit que **la courbe C est au dessous de la tangente T** au voisinage du point d'abscisse 0.

EXERCICE 2

A - 1° X suit la loi normale N (1 ; 0,01), la variable $T = \frac{X-1}{0{,}01}$ suit la loi normale N (0 ; 1)

a) $P(X < 0{,}98) = P(T < -2)$, $P(X < 0{,}98) = 1 - \pi(2)$,
$P(X < 0{,}98) = 0{,}0228$ à 10^{-4} près. **$p_1 = 0{,}0228$ à 10^{-4} près.**

b) $P(X > 1{,}025) = P(T > 2{,}5)$, $P(X > 1{,}025) = 1 - \pi(2{,}5)$,
$P(X > 1{,}025) = 0{,}0062$ à 10^{-4} près. **$p_2 = 0{,}0062$ à 10^{-4} près.**

2° a) Y est la variable aléatoire qui à tout paquet aléatoire de 6 bouteilles associe le nombre de bouteilles de contenance inférieure à 0,98 L. Les tirages sont supposés aléatoires et avec remise , pour chaque tirage il y a deux éventualités : la bouteille contient moins de 0,98 L avec la probabilité 0,023 ou la bouteille contient plus de 0,98 L avec la probabilité 0,977; Y suit la loi binomiale B (6 ; 0,023).

b) $p_3 = 1 - P(Y = 0)$, $p_3 = 1 - 0{,}977^6$, $p_3 = 1 - 0{,}870$, **$p_3 = 0{,}130$ à 10^{-3} près.**

B - On suppose encore que la variable aléatoire X suit la loi normale N $(1 ; 0{,}01)$.

1° a) $\overline{X}$ la variable aléatoire qui à tout échantillon aléatoire non exhaustif de 100 bouteilles associe la moyenne des contenances des bouteilles de cet échantillon suit la loi normale : N $\left(1 ; \frac{0.01}{\sqrt{100}}\right)$ soit N $(1 ; 0.001)$, la variable $T = \frac{\overline{X} - 1}{0.001}$ suit N $(1, 0)$.

b) $P(1 - h \leq \overline{X} \leq 1 + h) = 0{,}95$ équivaut à $P(-\frac{h}{0.001} \leq T \leq \frac{h}{0.001}) = 0{,}95$

et à $2\pi(\frac{h}{0.001}) - 1 = 0{,}95$ et à $\frac{h}{0.001} = 1{,}96$.

$h = 0{,}002$ à 10^{-3} près . **$P(0{,}998 \leq \overline{X} \leq 1{,}002) = 0{,}95$.**

2° **Construction du test :**

choix de H_0 : $m = 1$ *choix de H_1 :* $m \neq 1$

détermination de la région critique : Sous l'hypothèse H_0, $m = 1$, $\overline{X}$ suit la loi normale N $(1 ; 0{,}001)$ et d'après la question B - 1° on a **$P(0{,}99804 \leq \overline{X} \leq 1{,}00196) = 0{,}95$.**

Si H_0 est vraie on a 95% de chances de prélever un échantillon aléatoire dont la moyenne appartient à l'intervalle $I = [0{,}998 ; 1{,}002]$.

règle de décision : si $\overline{x} \in [0{,}998 ; 1{,}002]$ on accepte H_0,

si $\overline{x} \notin [0{,}998 ; 1{,}002]$ on rejette H_0 et on accepte H_1 .

3° a) La contenance moyenne des bouteilles de cet échantillon est $\overline{x} \approx 0{,}99795$

b) Utilisation du test : $\overline{x} \approx 0{,}997$, $\overline{x} \notin [0{,}998 ; 1{,}002]$ on rejette H_0 et on accepte H_1. On rejette donc l'hypothèse $m = 1$ L et on conclut que la machine est déréglée .

C - 1°

	$F(t_i)$	$R(t_i)$	$\ln R(t_i)$
30	0,1	0,9	– 0,10536
50	0,2	0,8	– 0,22314
90	0,3	0,7	– 0,356675
130	0,4	0,6	– 0,510825
170	0,5	0,5	– 0,69315
230	0,6	0,4	– 0,91629
300	0,7	0,3	– 1,20397
410	0,8	0,2	– 1,609438
580	0,9	0,1	– 2,302585

2° A l'aide de la calculatrice on obtient : $r = -0{,}999813$.

On obtient une équation de la droite de régression de y en t : $y = -3{,}953 . 10^{-3} t - 0{,}00599$.

On en déduit : $\ln [R(t)] = -0{,}004\, t - 0{,}006$ à 10^{-3} près .

3° $R(t) = e^{-0{,}004 t - 0{,}006}$, on prend 1 comme valeur approchée de $e^{-0{,}006}$ donc $R(t) = e^{-0{,}004 t}$.

Nous sommes en présence d'une loi exponentielle donc $MTBF = \frac{1}{\lambda}$, $MTBF = \frac{1}{0{,}004}$ **= 250 h** .

4° La date t_0 telle que $R(t_0) = 0{,}80$ est telle que $e^{-0{,}004 t_0} = 0{,}80$, $-0{,}004\, t_0 = \ln 0{,}80$,

$t_0 = -\frac{\ln 0{,}80}{0{,}004}$, $t_0 \approx 55{,}8$ heures .

La périodicité d'un entretien systématique est donc d'environ 56 heures.