MAINTENANCE CDO MP1 1994

Exercice I

A 1° Résolvons l'équation différentielle (E') : $(1+x)y' - y = 0$

L'équation différentielle (E') est de la forme $a(x)y' + b(x)y = 0$ si on pose $f(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$elle admet pour solution $y = Ce^{-F(x)}$ où F est une primitive de f.

$f(x) = -\frac{1}{1+x}$ donc $F(x) = -ln(1+x)$

$y = Ce^{ln(1+x)} = C(1+x)$

2°

f est solution particulière de l'équation différentielle (E) elle vérifie cette équation différentielle.

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$

Remplaçons y' et y respectivement par $f'(x)$ et $f(x)$. l'équation (E) devient :

$(1+x)\ \frac{1}{1+x} - ln(1+x) - C = -ln(1+x)$

$1 - C = 0$ donc $C = 1$ et la solution particulière est : $f(x) = ln(1+x) + 1$.

3°

La solution générale de (E) est égale à la solution générale de (E') plus la solution particulière de (E).

$y = C(1+x) + ln(1+x) + 1$

4°

Déterminons la fonction φ solution de (E) vérifiant $\varphi(x) = 0$

$\varphi(x) = C(1+x) + ln(1+x) + 1$

$\varphi(0) = C + 1$ donc $C + 1 = 0$ et $C = -1$

$\varphi(x) = -(x+1) + ln(1+x) + 1$

$\varphi(x) = ln(1+x) - x$

B 1°

Puisque X suit une loi de poisson de paramètre λ alors :

$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = e^{-\lambda} + e^{-\lambda}\ \lambda = e^{-\lambda}(\lambda+1)$

nous savons que $P(X \leq 1) = 0.95$ donc $e^{-\lambda}(\lambda+1) = 0.95$ et en prenant le logarithme des deux membres $-\lambda + ln(\lambda+1) = ln(0.95)$

λ est bien solution de l'équation $ln(1+x) - x = ln(0.95)$

2°

Calculons $\varphi'(x)$

$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-1-x}{1+x} = \frac{-x}{1+x}$

Quelque soit x appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ $\varphi'(x)$ est négatif la fonction est strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$

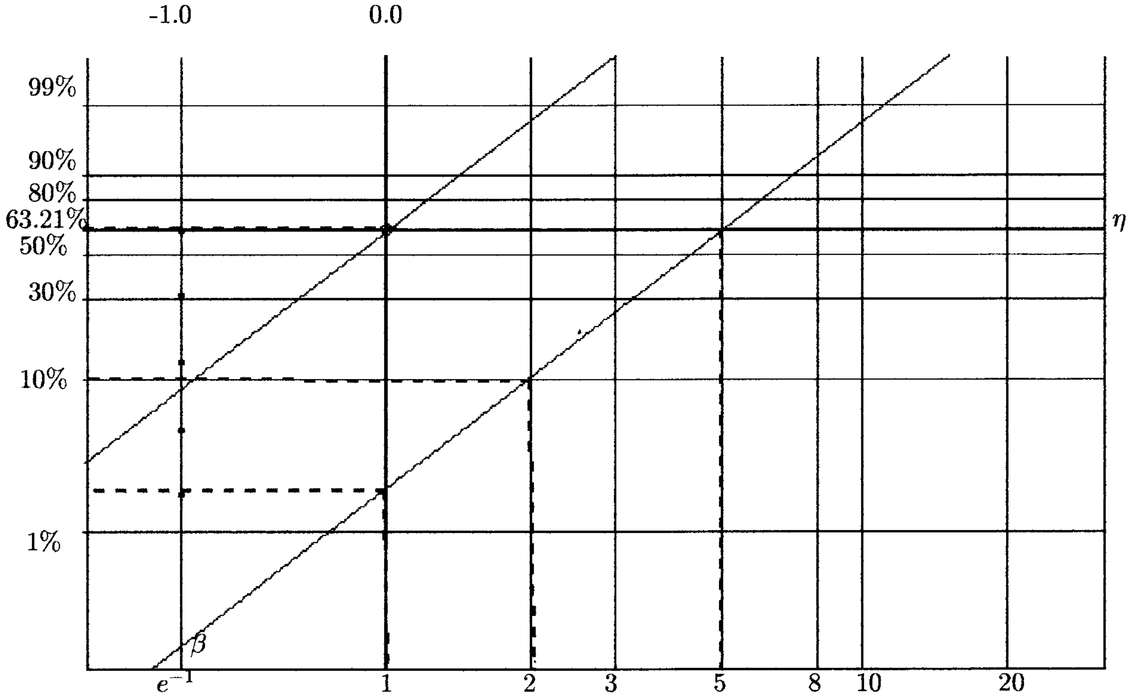
φ est une fonction strictement décroissante de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$

$ln(0.95) < 0$ appartient à l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$ il existe donc λ unique appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $\varphi(\lambda) = ln0.95$

λ appartient à l'intervalle $(0,3\ ;\ 0,4]$

Exercice 2

1^o Puisque $\gamma = 0$ la représentation graphique de la fonction de défaillance a pour représentation graphique une droite sur le papier de Weibull.



$\eta = 50$ elle passe par le point d'abscisse 50 sur l'axe des η et puisque $\beta = 2.4$ elle est parallèle à la droite qui passe par le point d'abscisse 1 sur l'axe η et par le point d'ordonnée 2.4 sur l'axe β.

2^o D'aprés le graphique la probabilité pour que la durée de vie soit inférieure à 10 mois est de 0,02

et la durée de vie soit inférieure à 50 mois est 0,63 donc la probabilité pour que la durée de vie soit comprise entre 10 mois et 50 mois est 0,61.

3^o

Calculons au bout de combien de temps un composant doit être changé pour que sa probabilité de survie soit supérieure à 0,90 donc

$$\begin{array}{lcl}
R(t) & \geq & 0,90 \\
e^{-\left(\frac{t}{50}\right)^{2,4}} & \geq & 0,90 \\
-\left(\frac{t}{50}\right)^{2,4} & \geq & ln(0,90) \\
\left(\frac{t}{50}\right)^{2,4} & \leq & -ln(0,90) \\
e^{2,4ln\left(\frac{t}{50}\right)} & \leq & -ln(0.90) \\
2,4ln\left(\frac{t}{50}\right) & \leq & ln\left(-ln(0,90)\right) \\
ln\left(\frac{t}{50}\right) & \leq & \frac{1}{2,4}\left(ln\left(-ln(0,90)\right)\right) \\
\frac{t}{50} & \leq & e^{\frac{1}{2,4}(ln(-ln(0,90)))} \\
t & \leq & 50\ e^{\frac{1}{2,4}(ln(-ln(0,90)))}
\end{array}$$

donc $t \leq 19,55 mois$

4^o

Si on monte en série deux composants pour que la probabilité de survie du système reste supérieure à 0,90 il faut que la probabilité de survie de chaque composants soit supérieure à $\sqrt{0,90}$ et en calculant comme précédemment t doit être inférieur à 14,66 mois