MAINTENANCE 1993 BXQ-MP1

Exercice I

1^o Résolvons l'équation différentielle $(E)\ :\ y" - 2y' + 2y = 0$

Elle a pour équation caractéristique $r^2 - 2r + 2 = 0$ qui a pour solutions $r_1 = 1 + i\ et\ r_2 = 1 - i$

La solution générale de (E) est : $y = e^x(Acosx + Bsinx)$.

2^o Déterminons la solution particulière φ de (E') de la forme $\varphi(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

$\varphi'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \varphi''(x) = 6ax + 2b$

Remplacons φ , φ' $et\varphi''$ par leur valeur dans (E').

$6ax + 2b - 6ax^2 - 4bx - 2c + 2ax^3 + 2bx^2 + 2cx + 2d = \frac{2x^3}{3} - 2x^2$ donc $2ax^3 + (2b - 6a)x^2 + (2c - 4b + 6a)x + 2d - 2c + 2b = \frac{2x^3}{3} - 2x^2$

Par identification on a le système :

$$\begin{cases} 2a & = & \frac{2}{3} \\ -6a + 2b & = & -2 \\ 6a - 4b + 2c & = & 0 \\ 2b - 2c + 2d & = & 0 \end{cases}$$

$a = \frac{1}{3}$, $b = 0$, $c = -1$ et $d = -1$ alors $\varphi(x) = \frac{x^3}{3} - x - 1$.

3^o L'ensemble des solutions de (E') : $y = e^x(Acosx + Bsinx) + \frac{x^3}{3} - x - 1$

4^o Déterminons la solution ϕ de (E').

elle passe par l'origine $\phi(0) = 0$ ce qui nous donne $A - 1 = 0$ alors $A = 1$

et $\phi'(x) = e^x(cosx + Bsinx) + e^x(-sinx + Bcosx) + x^2 - 1$ puique $\phi'(0) = 0$ alors $B = 0$

$\phi(x) = e^x cosx + \frac{x^3}{3} - x - 1$

5^o un développement limité à l'ordre 4 de :

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_1(x)$ et

$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_2(x)$

$e^x cosx = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_3(x) = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + x^4\varepsilon_3(x)$

la fonction ϕ a pour développement limité à l'ordre 4 à l'origine : $\phi(x) = -\frac{x^4}{6} + x^4\varepsilon(x)$

la courbe admet la droite d'équation $y = 0$ comme tangente et la courbe est située au dessous de sa tangente car $-\frac{x^4}{6} \leq 0$.

Exercice II

1^o Déterminons σ

X suit une loi $\mathcal{N}$ $(25\ ,\ \sigma)$ et nous voulons que : $P(24,50 \leq X \leq 25,50) = 0,90$

donc $P\left(\frac{-0,50}{\sigma} \leq \frac{X-25}{\sigma} \leq \frac{0,50}{\sigma}\right) = 0,90$ alors $2\pi(\frac{0,50}{\sigma}) - 1 = 0,90 \quad \pi(\frac{0,50}{\sigma}) = 0,95 \quad \frac{0,50}{\sigma} = 1,65$

$\sigma = 0,30$

2^o a) On préléve 10 tiges dans la production on peut considérer que l'on a un tirage avec remise et il y a deux possibilités soit l'événement est réalisé avec la probabilité $p = 0,90$ ou il ne l'ait pas avec la probabilité $q = 1 - p = 0,10$.

On a une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0,90$.

b) $P(Y = 10) = 0,90^{10} = 0,35$.

3^o a) Déterminons h tel que sous l'hypothèse H_0 : $P(F > h) = 0,95$

F est une loi normale de moyenne p inconnue et d'écart type $\sigma = \sqrt{\frac{0,09}{150}}$

sous l'hypothèse H_0 La variable aléatoire F suit une loi normale $\mathcal{N}(0,90\ ;\ \sqrt{\frac{0,09}{150}})$

$P(F > h) = 0,95 \quad P\left(\frac{F-0,90}{0,025} > \frac{h-0,90}{0,025}\right) = 0,95 \quad P\left(\frac{F-0,90}{0,025} < \frac{h-0,90}{0,025}\right) = 0,05\ donc\ \frac{h-0,90}{0,025} = -1,65$

$h = 0,86$

Si la proportion est supérieure à 86% on accepte l'hypothèse nulle H_0 la machine est bien réglée au seuil de 5%

Si elle est inférieure à 86% on accepte l'hypothèse H_1 la machine est mal réglée.

b) Le pourcentage de bonne pièce dans cette échantillon est : $\frac{150-22}{150} \times 100 = 85,33\%$

la machine est mal réglée au seuil de 5%.