MAINTENANCE 1992 ZTW-MP1

Exercice I

1^o

Résolvons l'équation différentielle E_0 : $x" + 9x = 0$

Elle a pour équation caractéristique $r^2 + 9 = 0$

les solutions sont $r_1 = 3i$ *et* $r_2 = -3i$

(E_0) a pour solution $x(t) = Acos(3t) + Bsin(3t)$

2^o

Déterminons une solution particulière $x_1(t)$ de (E) de la forme $x_1(t) = Acos(\omega t)$ dans le cas où $\omega \neq 3$

calculons $x_1'(t) = A.\omega.sin(\omega t)$ et $x"_1(t) = -A.\omega^2 cos(\omega t)$

En remplaçant $x_1(t)$ et $x"_1(t)$ par leur valeur dans (E).

$-A.\omega^2 cos(\omega t) + 9A.cos(\omega t) = 2cos(\omega t)$

$(9 - \omega^2)Acos(\omega t) = 2cos(\omega t)$

donc $(9 - \omega^2)A = 2$

et $A = \frac{2}{9-\omega^2}$

$$x_1(t) = \frac{2}{9 - \omega^2} cos(\omega t)$$

$$x(t) = Acos(3t) + Bsin(3t) + \frac{2}{9 - \omega^2} cos(\omega t)$$

3^o

Cherchons une solution particulière x_2 de l'équation différentielle (E_1) de la forme :

$x_2(t) = t\,(C_1 cos(3t) + C_2 sin(3t))$.

calculons $x_2'(t) = (C_1 cos(3t) + C_2 sin(3t)) + t(-3C_1 sin(3t) + 3C_2 cos(3t))$

et $x"_2(t) = 2\,(-3C_1 sin(3t) + 3C_2 cos(3t)) - 9\,(C_1 cos(3t) + C_2 sin(3t))\,t$

et en remplaçant dans (E_1)

$2(-3C_1 sin(3t) + 3C_2 cos(3t)) = 2cos(3t)$

par identification $C_1 = 0$ et $C_2 = \frac{1}{3}$

$$x_2(t) = \frac{1}{3}.t.sin(3t)$$

$$x(t) = Acos(3t) + Bsin(3t) + \frac{1}{3}t.sin(3t)$$

Exercice II

$1^o a)$

$R(t) = (0,05t + 1)e^{-0,1t}$ donc $R'(t) = 0,05e^{-0,1t} - 0,1(0,05t + 1)e^{-0,1t} = (-0,005t - 0,05)e^{-0,1t}$

Sur $[0\ ,\ +\infty[$ $\quad -0,005t - 0,05$ est strictement négatif et $e^{-0,1t}$ est stictement positif donc la fonction R est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

b)

La probabilité pour qu'une machine fonctionne plus de 10 mois est égale à $R(10) = \frac{1,5}{e^{-1}} = 0,55$

La probabilité pour qu'une machine tombe en panne au cours de la première année est égale à : $F(12) = 1 - R(12) = 1 - \frac{1,6}{e^{-1,2}} = 0,52$

c) $I_\alpha = \int_0^\alpha R(t)dt = \int_0^\alpha (0,05t + 1)e^{-0,1t}dt$

En faisant une intégration par parties :

$$\begin{aligned} u &= 0,05t + 1 & du &= 0,05dt \\ dv &= e^{-0,1t}dt & v &= -10e^{-0,1t} \end{aligned}$$

$I_\alpha = \left[-10(0,05t + 1)e^{-0,1t}\right]_0^\alpha + 0,5\int_0^\alpha e^{-0,1t}dt$

$\quad = 10 - 0,5\alpha e^{-0,1.\alpha} - 10e^{-0,1.\alpha} - 5\left[e^{-0,1t}\right]_0^\alpha$

$= 10 - (10 + 0,5\alpha)e^{-0,1.\alpha} + 5 - 5e^{-0,1.\alpha}$

$= 15 - (15 + 0,5\alpha)e^{-0,1.\alpha}$

$\lim_{\alpha \to +\infty} I_\alpha = 15$

donc la M.T.B.F est de 15 mois.
2^o a) Les variables aléatoires X et Y suivent la loi normale $\mathcal{N}(10\ ;\ 0,05)$
$p_1 = P(9,9 \leq X \leq 10,1) = P\left(-2 \leq \frac{X-10}{0,05} \leq 2\right) = 2\pi(2) - 1 = 0,9544$
$p_2 = p_1 = 0,9544$
La variable aléatoire Z suit la loi normale $\mathcal{N}(7\ ;\ 0,02)$
$p_3 = P(6,95 < Z < 7,05) = P\left(-2,5 < \frac{Z-7}{0,02} < 2,5\right) = 2\pi(2,5) - 1 = 0,9876$
b) Les variables aléatoires X, Y et Z sont indépendantes
La probabilité pour qu'une pièce soit acceptée : $p = p_1 \times p_2 \times p_3 = 09544^2.0,9876 = 0,8996$.