BTS MAINTENANCE 1991 Y-NT/MSP1

EXERCICE 1

I Calcul intégral
$I_0 = \int_0^1 e^x\,dx = [e^x]_0^1 = e - 1$
Pour calculer I_1 et I_2 nous ferons une intégration par parties.
$I_1 = \int_0^1 xe^x\,dx =$

$$\begin{array}{rclcrcl} u & = & x & \quad & du & = & dx \\ dv & = & e^x & & v & = & e^x \end{array}$$

$I_1 = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - I_0 = 1$
$I_2 = \int_0^1 x^2e^x\,dx =$

$$\begin{array}{rclcrcl} u & = & x^2 & \quad & du & = & 2xdx \\ dv & = & e^x & & v & = & e^x \end{array}$$

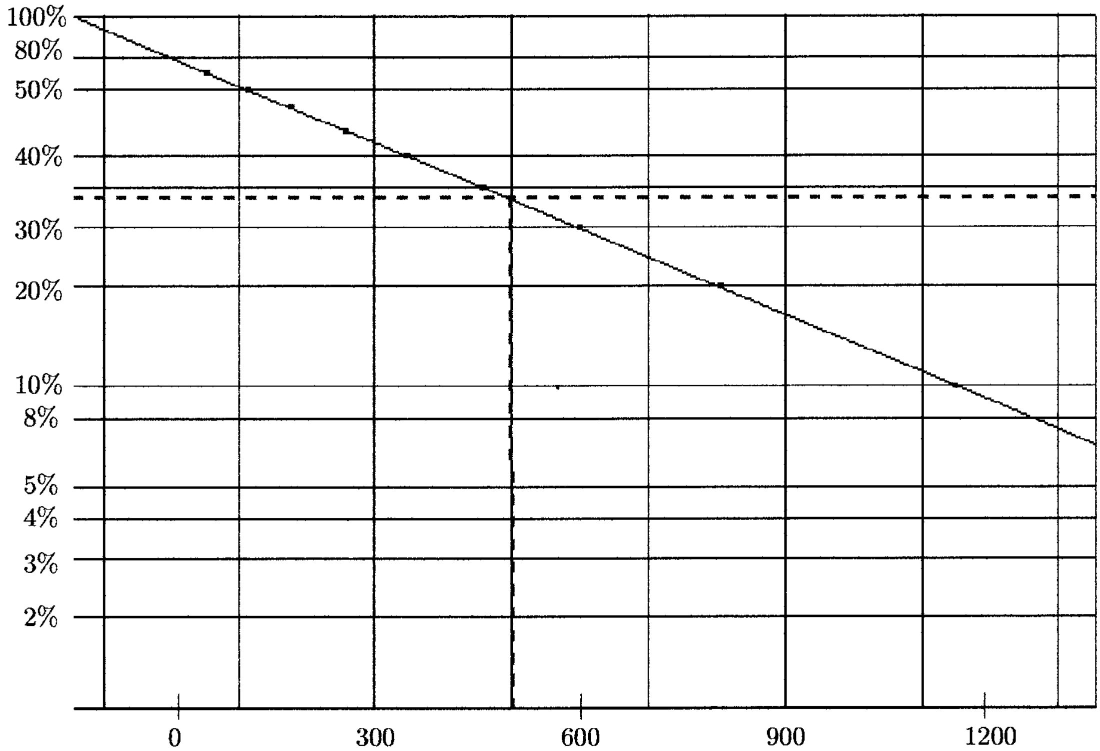
$I_2 = [x^2e^x]_0^1 - \int_0^1 2xe^x\,dx = e - 2I_1 = e - 2$

II - Applications
1) a) Montrons que g définie sur $[0\ ,\ 1]$ par $g(x) = xe^x$ peut représenter une densité de probabilité
$g(x)$ est le produit de deux nombres positif sur $[0\ ,\ 1]$ donc $g(x)$ est positif
$\int_0^1 g(x)dx = I_1 = 1$
la fonction g peut représenter une densité de probabilité.
b) $E(X) = \int_0^1 xg(x)dx = I_2 = e - 2$
2) $J = \int_0^1 (1-x)^2e^x dx = \int_0^1 (1-2x+x^2)e^x dx = \int_0^1 e^x dx - 2\int_0^1 xe^x dx + \int_0^1 x^2e^x dx = I_0 - 2I_1 + I_2 = e - 1 - 2 + e - 2 = 2e - 5$
$J \approx 0,44$.

EXERCICE 2

I - 1) La variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(10\ ;\ 0,2)$
Soit la variable aléatoire $T = \frac{X-10}{0,2}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$
Déterminons la probabilité p_1 pour qu'une pièce soit acceptée
$p_1 = P(9,54 \leq X \leq 10,46) = P\left(\frac{-0,46}{0,2} \leq T \leq \frac{0,46}{0,2}\right) = P(-2,3 \leq T \leq 2,3) = \pi(2,3) - \pi(-2,3) = \pi(2,3) - (1 - \pi(2,3)) = 2\pi(2,3) - 1 = 2 \times 0,9893 - 1 = 0,9786$
La probabilité p pour qu'une pièce soit refusée est : $p = 1 - p_1 = 0,0214$
Le pourcentage prévisible de pièce refusée est de : 2,14%.
2) a) La variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètre $n = 100$ et $p = 0,02$
$P(Y = 3) = C_{100}^3 \times 0,02^3 \times 0,98^{97} = 0,182$
b) La variable aléatoire Y peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 2$
$P(Y = 3) = e^{-2}\frac{2^3}{3!} = 0,180$
II - a)

durée de vie t	53	112	178	255	347	458	600	805	1151
nombre total de défaillants n_i à l'instant t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(t) = \frac{n_i}{10}$	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$	$0,6$	$0,7$	$0,8$	$0,9$
$R(t)$	$0,9$	$0,8$	$0,7$	$0,6$	$0,5$	$0,4$	$0,3$	$0,2$	$0,1$



b) Sur le papier semi-logaritmique la représentation graphiquede $R(t)$ peut être ajustée par une droite. Nous avons donc une fonction exponentielle $R(t) = e^{-\lambda t}$

$R(\frac{1}{\lambda}) = \frac{1}{e} = 0,368$ d'après la représentation graphique $\frac{1}{\lambda} = 500$ donc $\lambda = 0,002$.