

PROPOSITION DE CORRECTION

BTS ELECTROTECHNIQUE 2005

Exercice I

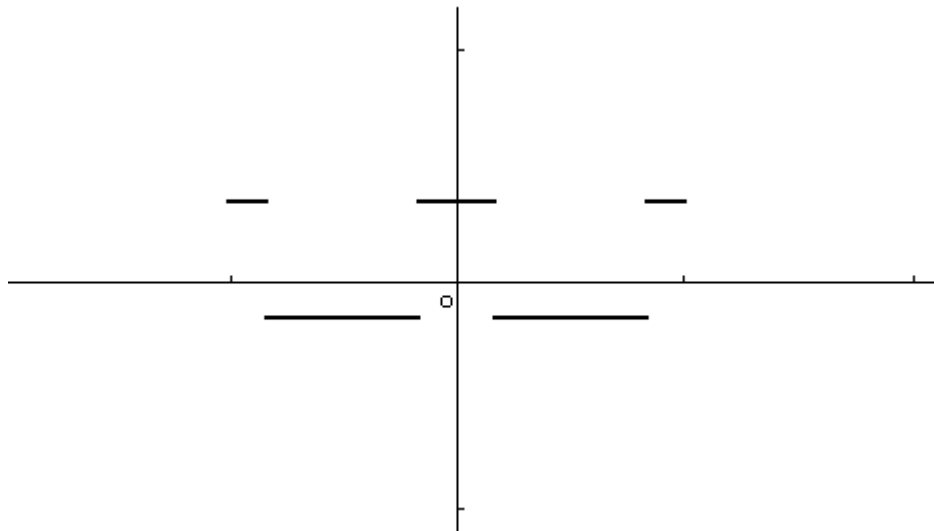
1. (a) $g(t) = (1 + \cos^2 t) \sin^2 t$

$$g'(t) = -2\cos t \sin t \sin^2 t + 2\sin t \cos t (1 + \cos^2 t) = -2\sin t \cos t (1 - \cos^2 t) + 2\sin t \cos t + 2\sin t \cos^3 t = -2\sin t \cos t + 2\sin t \cos^3 t + 2\sin t \cos t + 2\sin t \cos^3 t = 4\sin t \cos^3 t$$

(b) Sur l'intervalle $[0, \pi]$ $\sin t \geq 0$ donc le produit $4 \sin t \cos^3 t \geq 0$ alors $g'(t)$ est du signe de $\cos t$.

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$g'(t)$	0	+	0
		1	
$g(t)$		\nearrow	\searrow
	0		0

2. (a) .



(b) Calculons les coefficients a_0 et a_n du développement en série de fourier de f . Les coefficients b_n sont nuls puisque f est paire.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt$$

$$a_0 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt \text{ puisque } f \text{ est une fonction paire.}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \left(\int_0^\tau \left(\frac{1}{2} - \tau\right) dt - \int_\tau^{\frac{1}{2}} \tau dt \right) \\ &= 2 \left(\left[\left(\frac{1}{2} - \tau\right)t \right]_0^\tau - \left[\tau t \right]_\tau^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= 2 \left(\left(\frac{1}{2} - \tau\right)\tau - \tau\left(\frac{1}{2} - \tau\right) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Calculons les coefficients a_n

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

La fonction f a pour période 1 donc $\omega = 2\pi$.

$$a_n = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) \cos(2n\pi t) dt = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) \cos(2n\pi t) dt \text{ puisque } f(t) \text{ et } \cos(2n\pi t) \text{ sont des fonctions paires.}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= 4 \left(\int_0^\tau \left(\frac{1}{2} - \tau\right) \cos(2n\pi t) dt - \int_\tau^{\frac{1}{2}} \tau \cos(2n\pi t) dt \right) \\
&= 4 \left(\frac{1}{2n\pi} \left[\left(\frac{1}{2} - \tau\right) \sin(2n\pi t) \right]_0^\tau - \left[\frac{1}{2n\pi} \tau \sin(2n\pi t) \right]_\tau^{\frac{1}{2}} \right) \\
&= \frac{2}{n\pi} \left(\left(\frac{1}{2} - \tau\right) \sin(2n\pi\tau) + \tau \sin(2n\pi\tau) \right) \\
&= \frac{1}{n\pi} \sin(2n\pi\tau)
\end{aligned}$$

Le développement en série de fourier de f est donc :

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\pi} \sin(2n\pi\tau) \cos(2n\pi t)$$

3. (a) La formule de Parseval nous donne $E_f^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

En appliquant la formule à la fonction h pour les harmoniques de rang inférieur ou égal à 2 nous obtenons :

$$E_h^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi^2} \sin^2(2\pi\tau) + \frac{1}{4\pi^2} \sin^2(4\pi\tau) \right)$$

$$\sin(4\pi\tau) = 2\sin(2\pi\tau)\cos(2\pi\tau)$$

$$E_h^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi^2} \sin^2(2\pi\tau) + \frac{1}{\pi^2} \sin^2(2\pi\tau) \cos^2(2\pi\tau) \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \sin^2(2\pi\tau) (1 + \cos^2(2\pi\tau))$$

- (b) $\sin^2(2\pi\tau)(1 + \cos^2(2\pi\tau)) = g(2\pi\tau)$

$$E_h^2 = \frac{1}{2\pi^2} g(2\pi\tau)$$

4. Dans la question 1. (b) on a vu que la fonction g admet un maximum pour $t = \frac{\pi}{2}$ donc E_h^2 admettra un maximum pour $2\pi\tau = \frac{\pi}{2}$ donc pour $\tau = \frac{1}{4}$

Exercice 2

Partie A

1. (a) Déterminons la solution générale de l'équation différentielle sans second membre $\frac{1}{200}y'(t) + y(t) = 0$
Elle s'écrit sous la forme $y'(t) + 200y(t) = 0$ et a pour solution $y(t) = Ce^{-200t}$
Cherchons une solution particulière constante de l'équation différentielle (1)
 $y(t) = a$ donc $y'(t) = 0$ et en remplaçant $y(t)$ et $y'(t)$ par leur valeur on obtient $a = 146$
La solution générale de l'équation différentielle (1) est $y(t) = Ce^{-200t} + 146$
- (b) Déterminons la solution particulière $\omega(t)$ qui vérifie $\omega(0) = 150$
Nous avons $\omega(t) = Ce^{-200t} + 146$ donc $\omega(0) = C + 146$ et $C + 146 = 150$ donc $C = 4$
La solution particulière est donc $\omega(t) = 4e^{-200t} + 146$
2. (a) $\omega_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t) = 146$
La perte de vitesse du au couple résistant est : $\omega(0) - \omega_\infty = 4$
- (b) Déterminons le temps mis par le moteur pour stabiliser sa vitesse
 $\omega(t) \geq \omega_\infty$
donc
 $\left| \frac{\omega(t) - \omega_\infty}{\omega_\infty} \right| = \frac{\omega(t) - \omega_\infty}{\omega_\infty}$
et $\left| \frac{\omega(t) - \omega_\infty}{\omega_\infty} \right| = \frac{4e^{-200t}}{146}$
La vitesse sera stabilisée si $\frac{4e^{-200t}}{146} \leq 0,01$
 $e^{-200t} \leq \frac{1,43}{4}$ donc $-200t \leq \ln\left(\frac{0,73}{2}\right)$
et $t \geq -\frac{\ln(0,365)}{200}$
 $t \geq 0,005$

Partie B

1. (a)

(b) $\gamma(t) = K(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - \tau))$ a por transformée de Laplace

$$\Gamma(p) = K \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-\tau p} \right)$$

2. La transformée de Laplace de l'équation différentielle : $\frac{1}{200}f'(t) + f(t) = \gamma(t)$ avec $f(0^+) = 0$

est $\frac{1}{200}(pF(p) - f(0^+)) + F(p) = \Gamma(p)$

$$\left(\frac{p}{200} + 1\right) F(p) = \Gamma(p)$$

et $F(p) = \frac{200}{p+200}\Gamma(p)$

qui peut s'écrire sous la forme : $F(p) = K \frac{200}{p(p+200)}(1 - e^{-\tau p})$

3. (a) $\frac{200}{p(p+200)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+200}$

$$\frac{200}{p(p+200)} = \frac{a(p+200)}{p(p+200)} + \frac{bp}{p(p+200)}$$

$$\frac{200}{p(p+200)} = \frac{(a+b)p+200a}{p(p+200)}$$

Par identification on obtient le système :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 200a = 200 \end{cases}$$

donc $a = 1$ et $b = -1$.

$$\frac{200}{p(p+200)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+200}$$

(b) $F(p) = K \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+200} \right) - K \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+200} \right) e^{-\tau p}$

$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+200}$ a pour original $(1 - e^{-200t})\mathcal{U}(t)$

et $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+200}\right) e^{-\tau p}$ a pour original $(1 - e^{-200(t-\tau)})\mathcal{U}(t - \tau)$

$$f(t) = K(1 - e^{-200t})\mathcal{U}(t) - K(1 - e^{-200(t-\tau)})\mathcal{U}(t - \tau)$$

Si $t \in [0, \tau[$ $\mathcal{U}(t) = 1$ et $\mathcal{U}(t - \tau) = 0$

alors $f(t) = K(1 - e^{-200t})$

Si $t \in [\tau, +\infty[$ $\mathcal{U}(t) = 1$ et $\mathcal{U}(t - \tau) = 1$

alors $f(t) = K(e^{200\tau} - 1)e^{-200t}$

(c) $t \in [0, \tau[$ $f(t) = K(1 - e^{-200t})$ et $f'(t) = 200Ke^{-200t}$ et $f'(t)$ est strictement positif.

Si $t \in [\tau, +\infty[$ $f(t) = K(e^{200\tau} - 1)e^{-200t}$ et $f'(t) = -200K(e^{200\tau} - 1)e^{-200t}$

$\tau > 0$ donc $e^{200\tau} - 1 > 0$ et $f'(t)$ est strictement négatif

$f(0) = 0$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$

t	0	τ	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	0	$K(1 - e^{-200\tau})$	
	↗		↘
	0		0

(d)

